معادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

تعريف: نقول أن المعادلة التفاضلية التالية أنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$A\frac{dy}{dx}+By+C=0$$

حيث أن A و B و C دوال في x مستمرة حيث أن $A\neq 0$ ونفرض في فترة من الفترات
على مجال تغير x نكتب المعادلة بشكلها النظامي على أن يكون أمثال $y'=1$ نقسم على A.

$$① \quad y'+f(x)y=g(x) \quad ; \quad f=\frac{B}{A},\ y=\frac{C}{A}$$

إذا كانت $g(x)=0$ تصبح المعادلة على شكل: $② \; y'+f(x)y=0$ نسميها المعادلة
المتجانسة (لأن طرفها الأيمن يساوي الصفر). وهي معادلة ذات متحولات
منفصلة لحلها نفصل متحولاتها.

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int f(x)\,dx$$

$$\ln y=-\int f(x)\,dx+\ln c \Rightarrow \ln\frac{y}{c}=-\int f(x)\,dx$$

نأخذ e الطرفين

$$\frac{y}{c}=e^{-\int f(x)dx}\Rightarrow y=c\cdot e^{-\int f(x)dx} \quad ③$$

وهو الحل العام

نوجد الحل العام للمعادلة ① وتدعى هذه طريقة تحويل الثوابت (لاغرانج) والتي تدعى
معادلة تفاضلية غير متجانسة أو بطرف أيمن.

لحلها نتبع الخطوات التالية:

1. نأخذ الحل العام ② ونحول الثابت أي نجعله دالة في x يصبح على شكل:

$$y=c(x)\,e^{-\int f(x)dx} \quad ③'$$

لنشتق ③' فينتج لدينا:

$$y'=c'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}-c f(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

2. لنعوض كل من y و y' في المعادلة ①

$$c'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}\underbrace{-c f(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}+c f(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}}_{=0}=g(x)$$

SUBJECT:

$$c'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = g(x) \Rightarrow c'(x) = g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx} + c_1$$

وبالتعويض في ③ نحصل على y الحل العام للمعادلة المعطاة ①.

$$y = e^{-\int f(x)dx}\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + c_1\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

الحل ① ، الحل ②

الحل العام هو عبارة عن حلين الأول لا يحوي ثابت لذلك هو حل خاص والحل الثاني يحوي ثابت وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة ②.

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x\cdot y' - 2y = 2x^4 \quad ①$$

نقسم على $x \neq 0$.

$$y' - \frac{2y}{x} = 2x^3 \quad ②$$

نأخذ المعادلة المتجانسة منها

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{c} = 2\ln x \Rightarrow \ln\frac{y}{x} = \ln x^2$$

الحل العام لـ ② $\boxed{y = cx^2}$ ③

نحول الثابت فنجعله دالة في x على الشكل التالي:

نعوضها في ① $\begin{cases} y = c(x)\cdot x^2 \\ y' = c'x^2 + 2cx \end{cases}$ ③'

$$c'x^2 + 2cx - \frac{2}{x}cx^2 = 2x^3$$

$$c'x^2 = 2x^3 \Rightarrow c = 2\int x\,dx$$

نعوضها في ③' $\boxed{c = x^2 + c_1}$

الحل العام لـ ① $\boxed{y = x^4 + c_1 x^2}$

حل خاص لـ 1 ، الحل العام لـ 3

SUBJECT:

* لنتعرف على طريقة أخرى لحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى. طريقة ثانية.

. طريقة أولى:

. لنأخذ المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى من الشكل:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \quad (1)$$

ملاحظة: حسب إشارة $f(x)$ نكتب إشارة العامل.

. لنستخدم لذلك عامل التكميل للمعادلة:

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

. نضرب حدود هذه المعادلة بـ فينتج لدينا:

$$(y' \cdot e^{\int f(x)dx} + f(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \cdot y) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}$$

. الطرف الأيمن هو تفاضل تام للمعادلتين التاليتين:

$$[y \cdot e^{\int f(x)dx}]' = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}$$

. لنكامل طرفي المعادلة:

$$y \cdot e^{\int f(x)dx} = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx + c e^{-\int f(x)dx}$$

حل خاص لـ (1) — حل عام المتجانسة المناظرة (1)

مثال: جد الحل العام:

$$y' - \frac{1}{x} y = x \cdot e^{-x}$$

. لنستخدم عامل التكامل للمعادلة

$$\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

. لنضرب جميع حدود المعادلة بـ x

$$\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} y = e^{-x}$$

$$\frac{x y' - y}{x^2} = e^{-x}$$

$$\left[\frac{y}{x}\right]' = e^{-x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \int e^{-x} dx$$

$$y = -x\cdot e^{-x} + c\,x$$

حل خاص لـ 1 — حل عام لـ 1

المعادلات التي ترد إلى خطية (غير متجانسة) من الرتبة الأولى :

1 معادلة برنولي : من الشكل:

$$y' + p(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n \quad ①$$

- إذا كانت $n=0$ ترد المعادلة ① إلى معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى.
- إذا كان $n=1$ تصبح المعادلة على الشكل التالي :

$$y' + [p(x) - g(x)]\,y = 0$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة.

- إذا كانت $n\neq 0$ و $n\neq 1$ عندها ترد إلى معادلة خطية بإجراء التحويل التالي:

نقسم على y^n فينتج:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\cdot\frac{1}{y^{n-1}} = g(x) \quad ②$$

لذلك نجري التحويل : $\frac{1}{y^{n-1}} = Z \Leftarrow$

$$Z' = \frac{-(n-1)\cdot y^{n-2}\cdot y'}{y^{2n-2}} = (1-n)\cdot\frac{y'}{y^n} \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{Z'}{1-n}$$

نعوض كل من Z بقيمتها وكل من Z' بقيمتها في المعادلة ②

$$\frac{Z'}{1-n} + p(x)\cdot Z = g(x)$$

$$Z' + (1-n)\cdot p(x)\cdot Z = (1-n)\cdot g(x)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى.

نوجد الحل العام لها حسب أولر أو تحويل الثوابت فينتج لدينا Z بالعودة إلى المتحولات القديمة نحصل على الحل العام.